

YOKUŞ ve İVME DİRENÇLERİ



Prof. Dr. Selim ÇETİNKAYA

Yokuş direnci

■ Yer çekimi yokuşlarda direnç oluşturur.

Yokuş (eğim) direnci, taşıt ağırlığının yol yüzeyine paralel bileşenidir. Bir taşıtın herhangi bir sabit hızda (ivmesiz olarak) tırmanabileceği maksimum yokuş, o taşıtın **tırmanma yeteneği**dir.

Bu yetenek, özellikle ağır vasıtalar ve karayolu dışı taşıtlar için önemlidir. Yolu eğimi, genellikle eğim açısı (α), veya bu açının tanjantı ($\tan \alpha = st$) ile tanımlanmaktadır.

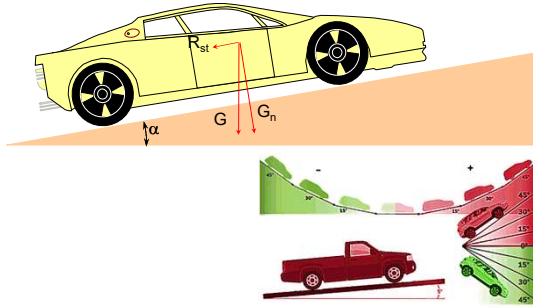
Yokuş direnci...

$$R_{st} = \pm G \cdot \sin \alpha$$

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha = st$$

$$R_{st} = \pm G \cdot \tan \alpha = \pm G \cdot st$$

Not: (+) değerler tırmanışı, (-) değerler inişi ifade etmektedir.



Yokuş direnci...

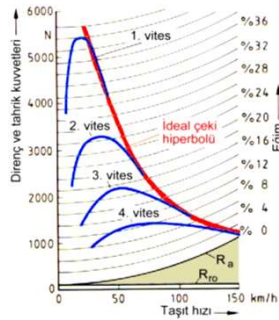
Maksimum yokuş tırmanma yeteneği için, rezerv kuvvet R_{st} 'ye harcanacağından, maksimum yokuş tırmanma yeteneği:

$$st = \frac{1}{G} (F_t - R_{ro} - R_{ax})$$

Maksimum yokuş tırmanma yeteneği düşük hızlarda gerçekleştiğinden, bu hızlardaki hava direnci (R_{ax}) ihmal edilebilir.

$$st = \frac{F_{net}}{G}$$

Yokuş direnci...



Yokuş direnci ile yuvarlanma ve hava dirençlerinin toplamını temsil eden eğriler birbirinden eşit aralıkta ve taşıt hızından bağımsızdır.

ÖRNEK

10 kN ağırlığındaki dört tekerlekli bir taşıtla ilgili olarak aşağıdaki değerler bilinmektedir:

Her bir tekerleğin yarıçapı	: 0,32 m
Motor torku	: 3000 min ⁻¹ de 100 Nm
Toplam transmisyon verimi	: 0,86
Toplam transmisyon oranı	: 12/1
Ön izdüşüm alanı	: 1,8 m ²
Hava direnci katsayısı	: 0,38
Kayma	: 0,05
Yuvarlanma direnci katsayısı	: 0,02
Havanın yoğunluğu	: 1,2 kg/m ³

Bu koşullardaki yokuş tırmanma yeteneğini belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Tekerlek torku;

$$F_t = \frac{M_e i_o}{r_w \eta_{tr}} = \frac{100 \times 12}{0,32} \cdot 0,86 = 3225 \text{ N}$$

Taşıtın hızı:

$$v = \frac{\pi r_w \eta_e (1-s)}{30 i_o} = \frac{\pi \times 0,32 \times 3000}{30 \times 12} (1 - 0,05) = 7,96 \text{ m/s } (28,65 \text{ km/h})$$

Yuvarlanma direnci;

$$R_{ro} = G \cdot \cos \alpha \cdot f_{ro} \approx G \cdot f_{ro} = 10000 \cdot 0,02 = 200 \text{ N}$$

Aerodinamik direnci;

$$R_{ax} = 0,5 \rho_a \cdot C_x \cdot A \cdot v^2 = 0,5 \cdot 1,2 \cdot 0,38 \cdot 1,8 \cdot (7,96)^2 = 26 \text{ N}$$

Eğim;

$$st = \frac{F_t - R_{ro} - R_{ax}}{G} = \frac{3225 - 200 - 26}{10000} = 0,2999 \approx \% 30$$

İvme direnci

Newton'un II. Hareket Yasası:

$$F = m \cdot a$$

İvme direnci (R_i) şu atalet kuvvetlerinden oluşmaktadır:

- Doğrusal hareket halindeki kütlelerin atalet kuvvetleri
- Dönme hareketi yapan kütlelerin atalet kuvvetleri
 - Motor
 - Aktarma organları
 - Tekerlekler

Newton'un hareket yasaları

- Isaac Newton 1687 yılında yayınladığı 'Philosophiae Naturalis Principia Mathematica' ('Doğal Felsefenin Matematik Prensipleri') adlı kitabında şu üç hareket kanununu önerdi:



- Kanun (atalet):** Dış bir kuvvetin etkisinde olmayan bir cisim, bir iç referans çerçevesinden bakıldığında hareketsizdir veya sabit bir hızla hareket etmektedir.
- Kanun (kuvvet ve ivme):** Herhangi bir cisim için, $F_{NET} = \Sigma F = ma$ Bir cismin a ivmesi, ona etki eden net kuvvet F_{NET} ile oransaldır.
- Kanun (etki-reaksiyon):** Kuvvetler çiftlerli meydana gelir: $F_{A,B} = -F_{B,A}$ (Her etki için aynı doğrultu ve ters yönde bir reaksiyon vardır.)

İvme direnci...

Dönen bir kütle için açısal hızını değiştirmek için gerekli moment;

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha$$

I: dönüş eksenine göre (polar) atalet momenti, kgm^2
 α : açısal ivme, rad/s^2

İvme direnci...

Arkadan tahrikli bir taşıtta ön tekerlekleri hızlandırmak için gerekli moment;

$$M_{wf} = I_{wf} \cdot a_{wf}$$

Arka tekerlekler ve ona bağlı olarak dönen diğer tüm kütleleri hızlandırmak için gerekli moment ise;

$$M_{wr} = I_{wr} \alpha_{wr} + I_e \alpha_e i_o \eta_{tr} \quad i_o = \frac{\omega_e}{\omega_{wr}} = \frac{\alpha_e}{\alpha_{wr}} \quad \text{ve} \quad \alpha_e = i_o \alpha_{wr}$$

$$M_{wr} = I_{wr} \alpha_{wr} + I_e \alpha_{wr} i_o^2 \eta_{tr}$$

$$\alpha_{wr} \approx \alpha_{wr} \approx \alpha \quad \text{yazılırsa;}$$

$$M_w = \alpha (\Sigma I_w + I_e i_o^2 \eta_{tr})$$

İvme direnci...

Dönen tüm kütlelerin yerine, tekerlek çevresinde bulunduğu varsayılan bir eşdeğer kütle yerleştirilirse, gerekli moment;

$$M = I a$$

$$I = m_o r_w^2 \quad \text{olduğundan,}$$

$$M_w = m_o r_w^2 a$$

$$m_o r_w^2 a = a (\Sigma I_w + I_e i_o^2 \eta_{tr})$$

m_o : eşdeğer kütle, kg

$$m_o = \frac{\Sigma I_w + I_e i_o^2 \eta_{tr}}{r_w^2}$$

Dönen bir tekerleğin atalet momenti:

r_j : jirasyon yarıçapı, m

$$I_w = m \cdot r_j^2$$

Jirasyon yarıçapı kütle için aynı atalet momentini sağlayacak şekilde yoğunlaştırılması durumunda eksenden uzaklığıdır. Diğer bir deyimle kütle için dönme ekseninden eşdeğer uzaklığıdır.

İvme direnci...

$$m_{ef} = m_v + m_e = m_v \left(1 + \frac{m_e}{m_v}\right) = m_v \gamma$$

$$\gamma = 1 + \frac{\sum I_w + I_e \cdot i_0^2 \cdot \eta_{tr}}{m_v \cdot r_w^2} \quad \gamma: \text{etkili kütle katsayısı}$$

Otomobiller için:

$$\gamma \approx 1,04 + 0,0025 i_0^2$$

Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim tekerleklerin dönel ataletlerini, ikinci terim ise motor ve onunla birlikte dönen elemanların ataletlerini temsil etmektedir.

İvme direnci...

Taşıtın ivme karakteristiklerinin belirlenmesinde zaman-hız ve zaman-yol ilişkileri çok önemlidir.

$$\gamma m_v \frac{dv}{dt} = F_T - \Sigma R = F_{net} \quad dt = \frac{\gamma \cdot m_v \cdot dv}{F_{net}}$$

İvmelenme süresince kat edilen yol:

$$s = \int_{v_1}^{v_2} \frac{v dv}{F_{net} / \gamma m_v} = \gamma m_v \int_{v_1}^{v_2} \frac{v dv}{f(v)}$$

ÖRNEK

Toplam ağırlığı 12 kN olan 4 tekerlekli bir taşıtta ilgili olarak aşağıdaki değerler bilinmektedir:

Her bir tekerleğin yarıçapı	: 32 cm
Her bir tekerleğin jirasyon yarıçapı	: 26 cm
Her bir tekerleğin ağırlığı	: 180 N
Motor torku	: 3000 1/min'de 120 Nm
Motor hızında dönen kütlelerin eşdeğer atalet momenti: 0,48 kgm ²	
Toplam transmisyon verimi	: 0,85
Toplam transmisyon oranı	: 3,82/1
Ön izdüşümü alanı	: 1,88 m ²
Hava direnci katsayısı	: 0,4
Havanın yoğunluğu	: 1,22 kg/m ³
Yuvarlanma direnci katsayısı	: 0,02
Kayma	: 0,03

Bu taşıtın, düz yolda ve rüzgarsız ortamdaki ivme yeteneğini belirleyiniz.

ÇÖZÜM

$$v = \frac{\pi \cdot I_w \cdot \eta_e}{30 \cdot j_0} (1-s) = \frac{\pi \times 0,32 \times 3000}{30 \times 3,82} (1 - 0,03) = 25,53 \text{ m/s} = 91,9 \text{ km/h}$$

$$F_T = \frac{m_e \cdot j_0 \cdot \eta_{tr}}{r_w} = \frac{120 \times 3,82}{0,32} \cdot 0,85 = 1217,63 \text{ N}$$

Toplam direnç (ΣR) = R_t + R_o + R_{ax} = F_t olmalıdır.

$$R_{t0} = G \cdot f_0 = 12000 \cdot 0,02 = 240 \text{ N}$$

$$R_{ax} = 0,5 \rho_a \cdot C_x \cdot A \cdot v^2 = 0,5 \cdot 1,22 \cdot 0,4 \cdot 1,88 \cdot (25,53)^2 = 299 \text{ N}$$

$$R_t = F_T - (R_{t0} + R_{ax}) = 1217,63 - (240 + 299) = 678,63 \text{ N}$$

ÇÖZÜM...

$$R_t = F_T - (R_{t0} + R_{ax}) = 1217,63 - (240 + 299) = 678,63 \text{ N}$$

$$R_t = m_{ef} \cdot a \quad a = \frac{R_t}{m_{ef}}, \quad m_{ef} = m \cdot \gamma \quad m = \frac{G}{g} \quad \gamma = 1 + \frac{\sum I_w + I_e \cdot i_0^2 \cdot \eta_{tr}}{m_v \cdot r_w^2}$$

$$I_w = m_w \cdot r_w^2 = 18,35 \cdot 0,26^2 = 1,24$$

$$\gamma = 1 + \frac{4 \times 1,24 + 0,48 \times 3,82^2 \times 0,85}{1223,24 \times 0,32^2} = 1,087$$

$$m_{ef} = 1,087 \cdot 1223,24 = 1329,66 \text{ kg} \quad a = 0,510 \text{ m/s}^2$$

ÖRNEK

Bir taşıtın;

Etkil kütlesi 1000 kg,

Ön izdüşüm alanı 2,25 m²,

Aerodinamik direnç katsayısı 0,33,

0 ... 50 km/h arasındaki tahrik kuvveti 3530 N,

50 ... 100 km/h arasındaki tahrik kuvveti 1765 N dur.

Yuvarlanma direnci 225 N, $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ olduğuna göre, 0 km/h'ten, 100 km/h'e ivmelenme süresini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$F_t = R_{to} + R_o + R_i$$

$$F_t - (R_{to} + 0,5 \rho C_x A v^2) = m_{ef} \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2(F_t - R_{to}) - \rho C_x A v^2}{2m_{ef}}$$

yazılabilir. Eşitlikteki v^2 'yi yalnız bırakmak üzere, her terim r $C_x A$ ya bölünürse;

$$\frac{2m_{ef} dv}{\rho C_x A dt} = \frac{2(F_t - R_{to})}{\rho C_x A} - v^2$$

yazılabilir. Bu eşitliğin integralinin alınabilmesi için, düzenlenmesi gerekir.

$$\frac{2(F_t - R_{to})}{\rho C_x A} = \alpha^2 \text{ yazılarak, her terim } \frac{\rho C_x A}{2m_{ef}} \text{ ile çarpılırsa:}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin integrali alınırsa;

ÇÖZÜM...

$$\frac{dv}{dt} = (\alpha^2 - v^2) \frac{\rho C_x A}{2m_{ef}} \text{ buradan da:}$$

$$\frac{dv}{\alpha^2 - v^2} = \frac{\rho C_x A}{2m_{ef}} dt \text{ ve } \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1}{\alpha + v} + \frac{1}{\alpha - v} \right) dv = \frac{\rho C_x A}{2m_{ef}} dt$$

yazılabilir. Bu eşitliğin integrali alınırsa;

$$\frac{1}{2\alpha} \left[\ln \left(\frac{\alpha + v}{\alpha - v} \right) \right]_{v_2}^{v_1} = \frac{\rho C_x A}{2m_{ef}} [t]_{t_2}^{t_1}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2(F_t - R_{to})}{\rho C_x A}}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2(3530 - 225)}{12 \times 0,33 \times 2,25}} = 86,13$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{2(1765 - 225)}{12 \times 0,33 \times 2,25}} = 58,80$$

ÇÖZÜM...

$$\frac{\rho C_x A}{2m_{ef}} = \frac{12 \times 0,33 \times 2,25}{2 \times 1000} = 0,4455 \cdot 10^{-3}$$

$$t_1 = \frac{1}{2 \times 86,16 \times 0,4455 \times 10^{-3}} \left[\ln \left(\frac{86,13 + 13,89}{86,13 - 13,89} \right) - 0 \right] = 4,24 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{1}{2 \times 58,80 \times 0,4455 \times 10^{-3}} \left[\ln \left(\frac{58,80 + 27,78}{58,80 - 27,78} \right) - \ln \left(\frac{58,80 + 13,89}{58,80 - 13,89} \right) \right] = 10,41 \text{ s}$$

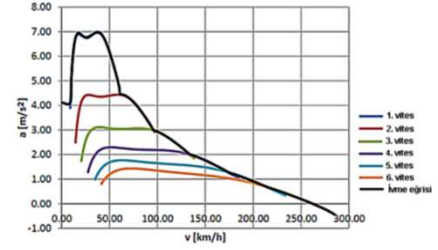
Böylece, toplam ivmelenme süresi;

$$t = 4,24 + 10,41 = 14,65 \text{ s}$$

olur.

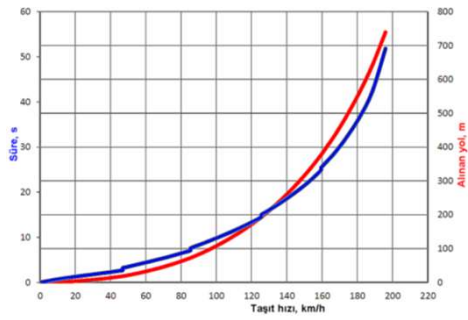
İvme direnci...

Taşıt hızı-ivme yeteneği ilişkisi



İvme direnci...

Hızlanma sırasında taşıt hızı-süre ve alınan yol ilişkisi



Diyaframdaki vites değiştirme süreleri 0,5 s dir.

